第 31 卷　第 1 期　　吉首大学学报(自然科学版)　　Vol. 31　No. 1
2010 年 1 月　　Journal of Jishou University (Natural Science Edition)　　Jan. 2010

文章编号: 1007- 2985(2010) 01- 0016- 03

一般一元二次四元数方程解的算法*

程学汉, 卢晓云
(鲁东大学数学与信息学院, 山东 烟台　264025)

摘　要: 利用线性方程组解的有关理论讨论了求解| 般| 元二次四元数方程方法步骤.

关键词: 四元数;| 元二次方程; 线性方程组

中图分类号: O151.1　　　文献标识码: A

一个实的四元数, 也简称为四元数, 表示为以下唯一的形式: $q = a_0 + a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}$. 其中: $a_i \in \mathbf{R}(i = 0, 1, 2, 3)$; i, j, k 满足 $\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = -1$, $\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}$, $\mathrm{jk} = -\mathrm{kj} = \mathrm{i}$, $\mathrm{ki} = -\mathrm{ik} = \mathrm{j}$. 记 $\boldsymbol{q} = (a_0, a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$, $\mathrm{Im}(q) = a_1\mathrm{i} + a_2\mathrm{j} + a_3\mathrm{k}$, $\mathrm{Im}(\boldsymbol{q}) = (a_1, a_2, a_3)^{\mathrm{T}}$. 四元数的全体称为四元数体, 记为 Q.

由于四元数自身独特的代数结构, 有关四元数多项式方程的求根方法的研究得到国内外学者的关注, 并获得了一系列的成果. 文献[1- 4] 分别讨论了四元数多项式方程根的结构和算法; 文献[5] 在四元数的复表示理论的基础上, 讨论了四元数多项式形如 $p(x) = q_m x^m + q_{m-1}x^{m-1} + \cdots + q_1 x + q_0$ 的零点集合的完整的特征结构以及多项式分解的最终形式; 文献[6- 8] 讨论了一元二次四元数方程解的结构和算法; 文献[9- 10] 给出了四元数方程 $x^2 + ax + b = 0$ 的公式解.

笔者根据四元数的定义, 将一般形式的四元数方程

$$x^2 + \sum a_i x b_i + f = 0 \tag{1}$$

转化为一个二次约束条件下的含参变量的线性方程组求解问题, 再利用克拉姆法则将一般形式下的四元数方程问题转化为一元高次多项式方程的实根问题, 从而得到了方程求解的一般方法步骤.

1　一般一元二次四元数方程(1) 的算法

约定 **R** 为实数域, **R**(***A***) 为矩阵 ***A*** 的列空间, $\boldsymbol{A}^{+}$ 为矩阵 ***A*** 的广义逆. 对于一般形式的一元二次四元数方程(1), 不妨设 $a_i = a_{i0} + a_{i1}\mathrm{i} + a_{i2}\mathrm{j} + a_{i3}\mathrm{k}$, $b_i = b_{i0} + b_{i1}\mathrm{i} + b_{i2}\mathrm{j} + b_{i3}\mathrm{k}$, $f = f_0 + f_1\mathrm{i} + f_2\mathrm{j} + f_3\mathrm{k}$. 根据四元数的定义, 有

$$0 = x^2 + \sum a_i x b_i + f = \left(x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + \sum_{s=0}^{3} m_{0s}x_s + f_0\right) + \left(2x_0x_1 + \sum_{s=0}^{3} m_{1s}x_s + f_1\right)\mathrm{i} +$$
$$\left(2x_0x_2 + \sum_{s=0}^{3} m_{2s}x_s + f_2\right)\mathrm{j} + \left(2x_0x_3 + \sum_{s=0}^{3} m_{3s}x_s + f_3\right)\mathrm{k}.$$

其中:

*　收稿日期: 2009- 04- 29
基金项目: 鲁东大学校资金资助项目(LY20062704)
作者简介: 程学汉(1972-), 男, 山东临沂人, 鲁东大学数学与信息学院讲师, 博士, 主要从事矩阵论研究.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

$$\begin{cases} m_{00} = \sum(a_{i0}b_{i0} - a_{i1}b_{i1} - a_{i2}b_{i2} - a_{i3}b_{i3}), \\ \vdots \\ m_{33} = \sum(a_{i0}b_{i0} + a_{i1}b_{i1} + a_{i2}b_{i2} - a_{i3}b_{i3}). \end{cases}$$

在本节, 令$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{pmatrix}$, $\alpha = \begin{pmatrix} m_{01} \\ m_{02} \\ m_{03} \end{pmatrix}$, $\gamma = \begin{pmatrix} m_{10} \\ m_{20} \\ m_{30} \end{pmatrix}$, 则四元数方程(1) 就转化为实系数四元二次方程组:

$$\begin{cases} x_0^2 + m_{00}x_0 - \mathrm{Im}(\boldsymbol{x})^{\mathrm{T}}\mathrm{Im}(\boldsymbol{x}) + \alpha^{\mathrm{T}}\mathrm{Im}(\boldsymbol{x}) + f_0 = 0, \\ (2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})\mathrm{Im}(\boldsymbol{x}) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - x_0\gamma. \end{cases} \tag{2}$$

由此可以得到如下结论:

定理 1　一元二次四元数方程(1) 有解的充要条件是实系数四元二次方程组(2) 在实数域上有解.

对于方程组(2), 进一步变形可以得到如下等价方程租:

$$\left(Im(\boldsymbol{x}) - \frac{\alpha}{2}\right)^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{Im}(\boldsymbol{x}) - \frac{\alpha}{2}\right) = \left(x_0 + \frac{m_{00}}{2}\right)^2 + f_0 - \frac{m_{00}^2}{4} + \frac{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha}{4}, \tag{3}$$

$$(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})\left(\mathrm{Im}(\boldsymbol{x}) - \frac{\alpha}{2}\right) = \mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - 0.5\boldsymbol{A}\alpha - x_0(\gamma + \alpha). \tag{4}$$

将 x_0 看作参变量, 方程(4) 就成了含参变量 x_0 的线性方程. 现对 x_0 的值进行讨论.

(1) 当 $\det(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A}) \neq 0$ 时, 有 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{x}) = (2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})^{-1}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - x_0\gamma)$, 代入方程(3) 得到含参变量 x_0 的有理分式方程, 进一步可以化为求解关于 x_0 的一元八次实系数多项式方程的实数根的问题. 利用数值计算的方法可以求出 x_0 的实数根, 进而求出四元数方程的解.

(2) 当 x_0 满足 $\det(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A}) = 0$ 时, 方程(4) 有解当且仅当 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - x_0\gamma \in \mathbf{R}(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})$ 成立, 此时方程(4) 的通解为 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{x})\alpha = (2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})^{+}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - x_0\gamma) + (\boldsymbol{I}_3 - (2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})^{+}(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A}))\boldsymbol{y}$, 其中 $\boldsymbol{y} \in \mathbf{R}^3$ 为任意的向量. 满足 $\min \|\mathrm{Im}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\alpha\|_2$ 的解为 $\mathrm{Im}(\boldsymbol{x}) - \frac{1}{2}\alpha = (2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})^{+}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - 0.5\boldsymbol{A}\alpha - x_0(\gamma + \alpha))$, 则有仅当 $x_0^2 + m_{00}x_0 + f_0 + \frac{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha}{4} \geqslant \|(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})^{+}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - 0.5\boldsymbol{A}\alpha - x_0(\gamma + \alpha))\|_2^2$, $\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - 0.5\boldsymbol{A}\alpha - x_0(\gamma + \alpha) \in \mathbf{R}(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})$ 时, 四元数方程(1) 有解. 令 $\gamma_1, \dots, \gamma_s$ 为矩阵 $2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A}$ 的零空间中的一组标准正交基, 则此时方程(1) 的解为 $\boldsymbol{x} = (x_0, ((2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})^{+}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - 0.5\boldsymbol{A}\alpha - x_0(\gamma + \alpha)) + \frac{1}{2}\alpha + \sum_{i=1}^{s}k_i\gamma_i)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, 其中 $\sum_{i=1}^{s}k_i^2 = x_0^2 + m_{00}x_0 + f_0 + \frac{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha}{4} - \|(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})^{+}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - 0.5\boldsymbol{A}\alpha - x_0(\gamma + \alpha))\|_2^2$.

实系数四元二次方程组(2) 可以看作是一个具有二次约束条件的含参变量 x_0 的线性方程, 由此可以得到下面的求一般一元二次四元数方程的方法.

2　一般一元二次四元数方程求解的方法步骤

(i) 根据方程的系数, 求出 m_{ij} $(i, j \in [0, 3])$. 得到等价方程(2).

(ii) 当 x_0 满足 $\det(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A}) = 0$ 时, 仅当 $x_0^2 + m_{00}x_0 + f_0 + \frac{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha}{4} \geqslant \|(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})^{+}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - 0.5\boldsymbol{A}\alpha - x_0(\gamma + \alpha))\|_2^2$, $\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - 0.5\boldsymbol{A}\alpha - x_0(\gamma + \alpha) \in \mathbf{R}(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})$ 时, 四元数方程(1) 有解且 $\boldsymbol{x} = (x_0, ((2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})^{+}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - 0.5\boldsymbol{A}\alpha - x_0(\gamma + \alpha)) + \frac{1}{2}\alpha + \sum_{i=1}^{s}k_i\gamma_i)^{\mathrm{T}})^{\mathrm{T}}$, 其中 $\sum_{i=1}^{s}k_i^2 = x_0^2 + m_{00}x_0 + f_0 + \frac{\alpha^{\mathrm{T}}\alpha}{4} - \|(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A})^{+}(\mathrm{Im}(\boldsymbol{f}) - 0.5\boldsymbol{A}\alpha - x_0(\gamma + \alpha))\|_2^2$.

(iii) 当 $\det(2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A}) \neq 0$ 时, 将线性方程(4) 的解代入方程(3), 求解关于 x_0 的一元八次实系数多项式方程的实数根, 进而求出四元数方程的解.

例 1　解一元二次四元数方程 $x^2 + x + \mathrm{i}x\mathrm{i} - \mathrm{j}x\mathrm{j} + \mathrm{k}x\mathrm{k} + 2 = 0$.

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved.　http://www.cnki.net

解　求出得到等价形式:

$$\begin{cases} x_0^2 - x_1^2 - x_2^2 - x_3^2 + 2 = 0, \\ 2x_0x_1 = 0, \\ (2x_0 + 4)x_2 = 0, \\ 2x_0x_3 = 0. \end{cases} \tag{5}$$

计算行列式 $|2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A}| = x_0^2(2x_0 + 4)$. 讨论: 当 $x_0 = 0$ 时, 可得 $x_2 = 0$, 代入方程(5) 得到 $x_1^2 + x_3^2 = 2$; 当 $x_0 = -2$ 时, 可得 $x_1 = x_3 = 0$, 代入方程(5) 得到 $x_2 = \sqrt{6}$; 当 $|2x_0\boldsymbol{I}_3 + \boldsymbol{A}| \neq 0$ 时, 可得 $x_1 = 0$, $x_2 = 0$, $x_3 = 0$, 方程(5) 无实根. 所以原方程的解集为 $\{-2 \pm \sqrt{6}\mathrm{j}, \sqrt{2}\cos\theta\mathrm{i} + \sqrt{2}\sin\theta\mathrm{k} \mid \theta \in \mathbf{R}\}$.

参考文献:

[1] NIVEN I. Equations in Quaternions [J]. Amer. Math. Monthly, 1941, 48: 654-661.

[2] GORDON B, MOTZKIN T S. On the Zeros of Polynomials over Division Rings [J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1965, 116: 218-226.

[3] BRAY U, WHAPLES G. Polynomials with Coefficients from a Division Ring [J]. Can. J. Math, 1983, 35: 509-515.

[4] EILENBERG S, NIVEN I. The Fundamental Theorem of Algebra for Quaternions [J]. Bull. Amer. Math. Soc., 1994, 50: 246-248.

[5] 程学汉. 多项式矩阵方程与可逆系统的典范分解 [D]. 上海: 华东师范大学, 2006.

[6] ZHANG S Z, MU D L. Quadratic Equations over Noncommutative Division Rings [J]. J. Math. Res. Exposition, 1994, 14: 260-264.

[7] PORTER R M. Quaternionic Linear and Quadratic Equations [J]. Journal of Natural Geometry, 1997, 11: 101-106.

[8] SERÔDIO R, LOK-SHUN SIU. Zeros of Quaternion Polynomials [J]. Applied Mathematics Letters, 2001, 14(2): 131-260.

[9] HUANG Li-ping, WASIN SO. Quadratic Formulas for Quaternions [J]. Applied Mathematics Letters, 2002, 15: 533-540.

[10] 丰　静, 程学翰. 四元数二次方程解的显式表示 [J]. 湖南农业大学学报: 自然科学版, 2008, 34(3): 369-373.

Algorithm for General Quadratic Quaternionic Equations with One Unknown

CHENG Xue-han, LU Xiao-yun

(School of Mathematics and Information, Ludong University, Yantai 264025, Shandong)

Abstract: By applying corresponding theories of linear equation, we give the basic steps of solving the general quadratic quaternionic equation with one unknown.

Key words: quaternion; quadratic equation with one unknown; system of linear equations

(责任编辑　向阳洁)

© 1994-2012 China Academic Journal Electronic Publishing House. All rights reserved. http://www.cnki.net